# Mécanique du Solide

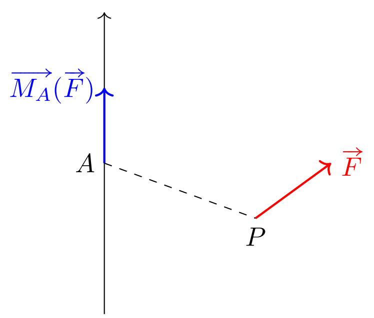
Aubin SIONVILLE

MPI Clemenceau - 2021-2023

## Rotations

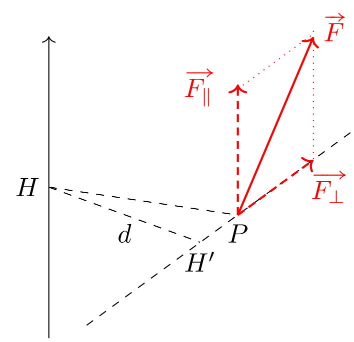
### Vecteur instantané de rotation

$$\vec{\Omega} = \dot{\theta}\overrightarrow{u_\Delta}$$




### Vitesse de rotation

$$\vec{v} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$




### Moment d'une force par rapport à un point

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{F}) = \overrightarrow{AP} \wedge \vec{F}}$$

### Moment d'une force par rapport à un axe

$$\boxed{\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{F}) \cdot \overrightarrow{u_\Delta}}$$

$$\boxed{\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \pm d \times F_\perp}$$

### Moment résultant par rapport à un point

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{F}) = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{f}_i) = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{AP_i} \wedge \vec{f}_i}$$

### Moment résultant par rapport à un axe

$$\boxed{\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{M}_\Delta(\vec{f}_i) = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{AP_i} \wedge \vec{f_i} \cdot \overrightarrow{u_\Delta}}$$

### Couple d'un système de forces

$$\boxed{(F_i) \text{ est un couple} \quad \Longleftrightarrow \begin{cases} & \sum(\vec{F_i}) = 0 \\ \vec{\mathcal{C}} = & \sum(\overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{F_i})) \neq 0 \end{cases}}$$

### Moment d'inertie d'un solide

$$\boxed{L_\Delta = J_\Delta \omega} \text{ avec } \vec{\Omega} = \omega \overrightarrow{u_\Delta}$$

$$\boxed{J_\Delta = \sum_{i=1}^{n} m_i {r_i}^2}$$

# Moment cinétique et moment d'inertie

### Moment cinétique par rapport à un point

$$\boxed{\overrightarrow{L_A}(M) = \overrightarrow{AP} \wedge m\vec{v}}$$

### Moment cinétique par rapport à un axe

$$\boxed{L_\Delta(M) = \overrightarrow{L_A}(\vec{v}) \cdot \overrightarrow{u_\Delta}}$$

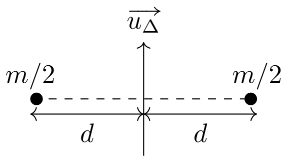
### Moment cinétique d'un solide par rapport à un point

$$\boxed{\overrightarrow{L_A}(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{L_A}(\overrightarrow{M_i}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{v}(M_i)}$$

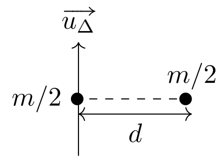
### Moment cinétique d'un solide par rapport à un axe

$$\boxed{L_\Delta(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^{n} L_\Delta(\overrightarrow{M_i}) = \sum_{i=1}^{n} m_i {r_i}^2 \dot{\theta}_i}$$

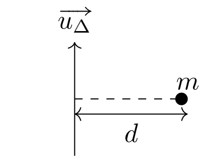
## Moments d'inertie usuels




$J_\Delta = md^2$

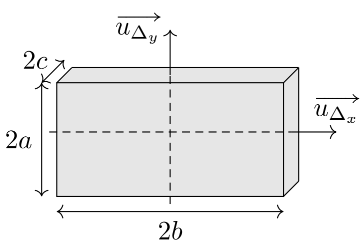



$J_\Delta = md^2/2$



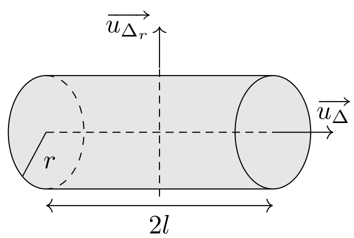

$J_\Delta = md^2$

### Parraléépipède



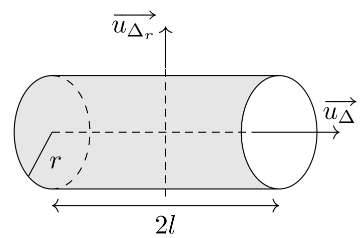

$J_{\Delta_x} = m(a^2 + b^2)/3$
$J_{\Delta_y} = m(a^2 + b^2)/6$

### Cylindre plein




$J_\Delta = m(r^2)/2$

### Cylindre creux




$J_\Delta = m(r^2)$

### Théorème du moment cinétique par rapport à un point

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L}_A = \overrightarrow{\mathcal{M}_A}}$$

### Théorème du moment cinétique par rapport à un axe

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L_\Delta = \mathcal{M}_\Delta}$$

### Théorème du moment cinétique par rapport à un point pour un solide

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L}_A(\mathcal{S}) = \overrightarrow{\mathcal{M}_{\mathrm{ext}/A}}}$$

### Théorème du moment cinétique par rapport à un axe pour un solide

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L_\Delta(\mathcal{S}) = J_\Delta \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \mathcal{M}_{\mathrm{ext}/\Delta}}$$

# Energétique

## Energie cinétique d'un solide en rotation

$$\boxed{\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2}$$

## Puissance d'une force

$$\boxed{P(\overrightarrow{F}) = \mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{F}).\omega}$$

## Travail d'une force

$$\boxed{W_{M_1 \to M_2}(\overrightarrow{F}) = \int_{M_1}^{M_2} \delta W(\overrightarrow{F}) = \int_{t_1}^{t_2} P(\overrightarrow{F})\mathrm{d}t = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{F})\mathrm{d}\theta}$$

## Théorème de la puissance cinétique pour un solide en rotation

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\mathcal{E}_c(\mathcal{S}) = \mathcal{M}_{\mathrm{ext}/\Delta}.\omega}$$

## Théorème de l'énergie cinétique pour un solide en rotation

$$\boxed{\Delta\mathcal{E}_c(\mathcal{S}) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathcal{M}_{\mathrm{ext}/\Delta}.\omega \mathrm{d}\theta}$$

# Frottements solides

$$\boxed{\overrightarrow{F} = \overrightarrow{N} + \overrightarrow{T}}$$

## Frottement statique

$$\boxed{T < f_s N}$$

En général

$$\boxed{f_d \leq f_s}$$

## Frottement dynamique

$$\boxed{T = f_d N}$$

## Lois d'Amontons-Coulomb

Le solide ne glisse pas sur le support tant que $T < f_s N$.
Lors du glissement, $T = f_d N$, $\overrightarrow{T} \propto (-\overrightarrow{v}_{1/2 \text{ glissement}})$.

## Visualisation par un cône de frottement

On défini $\boxed{\tan(\varphi) = f_s}$
Alors il n'y aura pas de frottements tant que $\overrightarrow{R}$ est dans le cône de frottement.

## Plan incliné

Pour un solide posé sans vitesse : $\tan(\alpha_{\text{lim}}) = f_s$

## Puissance des force de frottements

$$P_{frot} = \overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{v_g} = (\overrightarrow{N} + \overrightarrow{T} \cdot \overrightarrow{v_g}) = \boxed{\overrightarrow{T} \cdot \overrightarrow{v_g}}$$

## Puissance des actions de contact

Lorsque deux solides $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}2$ sont en contact, la puissance des actions de contact est une puissance intérieure au système complet $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$.
La puissance totale développée par ces actions s'exprime dans le référentiel du laboratoire :

$$\begin{aligned}
P_{\text{contacts}} &= P_1 + P_2 \\
&= \overrightarrow{R_{2/1}} \cdot \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{R_{1/2}} \cdot \overrightarrow{v_2} \\
&= \overrightarrow{R_{2/1}}(\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}) \\
&= \overrightarrow{R_{2/1}} \cdot \overrightarrow{v_{g,1/2}} \\
&= \overrightarrow{T_{2/1}} \cdot \overrightarrow{v_{g,1/2}}
\end{aligned}$$

Si pas de glissement, $\overrightarrow{v_{g,1/2}} = 0$ donc $P_{\text{contacts}} = 0$
Si glissement, $\overrightarrow{T} = -K\overrightarrow{v_{g,1/2}}$ donc $P_{\text{contacts}} < 0$